DISCUSSION PAPERS IN STATISTICS AND ECONOMETRICS

SEMINAR OF ECONOMIC AND SOCIAL STATISTICS
UNIVERSITY OF COLOGNE

No. 2/95

Die axiomatische Herleitung einer Klasse von dynamischen Ungleichheitsmaßen

von

Andreas Stich*

Januar 1995

Zusammenfassung

Im Bereich der Messung der Änderung von Ungleichheit sind schon einige Maße vorgeschlagen worden. Doch bis jetzt hat noch niemand versucht, auf Grundlage von bestimmten Axiomen eine Klasse von dynamischen Ungleichheitsmaßen herzuleiten. Dies geschieht in dieser Arbeit. Nach der Definition der Axiome wie Pigou–Dalton–Bedingung für dynamische Ungleichheitsmaße, Normierung, Symmetrie und Additiver Konsistenz, wird gezeigt, daß nur die normierte Differenz von Werten eines Ungleichheitsmaßes für die zwei Vergleichsperioden oder –gebiete alle Axiome erfüllt. Es werden für diese Indices Schätzer und Formeln zur Berechnung der Sensitivität angegeben.

*Seminar für Wirtschafts– und Sozialstatistik, Universität zu Köln, Albertus–Magnus–Platz, 50923 Köln, Deutschland; Tel: +49/221/470 2809, Fax: +49/221/470 2816, e–mail: stich@wiso.uni-koeln.de

1 Einleitung

Neben der Messung von Ungleichheit in einem Zeitpunkt oder für ein Gebiet interessiert vor allem die Veränderung von Ungleichheit im Zeitverlauf oder der Unterschied zwischen zwei Gebieten. Zu diesem Zweck wurden Maße entwickelt, die, basierend auf zwei Beobachtungsvektoren, die Änderung der Ungleichheit messen. Vorschläge für solche „dynamische" Ungleichheitsmaße stammen zum Beispiel von Grossack (1965), der den Steigungsparameter der linearen Regression der Marktanteile in der Ausgangsperiode auf die Anteile in der Vergleichsperiode betrachtet. Einen ähnlichen Ansatz wählen Hart und Prais (1956), die als Maß das arithmetische Mittel der Steigungsparameter von linearer und inverser linearer Regression nehmen. Bruckmann (1969) betrachtet die Quotienten der Herfindahl– bzw. Gini–Indices für die beiden Perioden und transformiert diese, um Funktionen zu erhalten, die zwischen minus Eins und Eins liegen.

Die bis jetzt erwähnten Maße basieren alle auf dem Quotienten der Ungleichheitsmaße für die beiden Perioden. Eine weitere, intuitive, Möglichkeit Änderung zu messen besteht in der Differenzenbildung. Vorschläge dafür finden sich bei Franke (1989), der die Differenz der Exponentialindices betrachtet, Weiss (1965), welcher die Differenz der Marktanteile der k größten Unternehmen wählt, und Piesch (1975). Diese drei versuchen auch durch die Zerlegung der einzelnen Maße weitere Informationen über die Ungleichheitsänderung zu erhalten. Dies erweist sich allerdings als problematisch, da man dazu sehr restriktive Anforderungen an die einzelnen Gruppen stellen muß (siehe Stich (1993)).

Auch Lorenzen (1979) wählt die Differenz als Änderungsmaß. Er nimmt den Gini-Index und normiert die Differenz, indem er durch den Gini-Index der Ausgangsperiode teilt. Im Gegensatz zu allen anderen Vorschlägen beschäftigt er sich auch eingehend mit dem Problem ungleicher Vektorlängen. [Jedoch ist die Formel zur Berechnung des dynamischen Maßes bei Auffüllen eines Vektors leider nicht allgemeingültig, wie man leicht durch ein Gegenbeispiel zeigen kann (Stich (1993))]. In den anderen Arbeiten wird dies entweder ignoriert oder die fehlenden Werte durch Nullen ersetzt. Die letzte Vorgehensweise ist jedoch nur bei Untersuchungen über absolute Konzentration zulässig.

Kahnwald (1974) betrachtet die Veränderung des Anteils an der Merkmalssumme für die jeweils i kleinsten Ausprägungen, indem er die Differenz bildet. Danach summiert er diese Werte auf und normiert sie, indem er durch die aufsummierten Anteile der Ausgangsperiode dividiert. Er zeigt, daß dieses Maß die Fläche zwischen der Diagonalen und der Kurve, die durch die Punkte $\left(\sum_{j=1}^{i} p_j, \sum_{j=1}^{i} q_j\right)$ verläuft, ist. Dabei sind p_j und q_j die geordneten Merkmalsanteile der ersten bzw. zweiten Periode.

Ein anderer Weg, die Änderung der Ungleichheit zu messen, ist der Vergleich der Verteilungsfunktionen der beiden Perioden oder Gebiete. Dazu sei hier nur die Arbeit von Schmid (1994) genannt, welcher über die interdistributionelle Lorenzkurve und darauf basierenden, skalaren Maßen die Änderung mißt. Weitere Arbeiten zu diesem Thema sind in diesem Artikel aufgeführt.

Obwohl es bis jetzt einige Vorschläge zur Messung der Änderung von Ungleichheit gegeben hat, hat noch niemand versucht, sich diesem Problem axiomatisch zu nähern. So erfüllen einige der oben genannten Maße einige Eigenschaften nicht, die für ein Änderungsmaß wichtig sind. So zeigen die Maße von Grossak (1965) und Hart und Prais (1956) eine unterschiedliche Änderung der Ungleichheit an, wenn die beiden Argumente vertauscht werden. Das gleiche gilt für die Indices von Lorenzen (1979). Die Maße von Kahnwald (1974) und Schmid (1994) zeigen nur die Größe der Änderung, jedoch nicht deren Richtung an. Diese Arbeit beschäftigt sich mit der axiomatischen Herleitung einer Klasse von dynamischen Ungleichheitsmaßen. Unter Vorgabe von sinnvollen Axiomen zeigt sie, daß es nur eine Klasse von Maßen gibt, die diese Eigenschaften erfüllen. Dabei wird diese Klasse auf Grundlage von Verteilungsfunktionen hergeleitet. Für die Ungleichheitsmaße, welche auf Beobachtungsvektoren basieren, ist die Klasse der dynamischen Indices ein Spezialfall der ersteren. Sie enthält dann auch Maße, welche Konzentrationsänderung messen. Die Definition der Indices wird absichtlich so allgemein wie möglich gehalten, um ein möglichst breites Anwendungsspektrum zu gewährleisten. So kann man diese Maße sowohl für Konzentrationsänderung als auch für Disparitätsänderung einsetzen.

Der nächste Abschnitt enthält die Definition der Axiome, und der dritte Teil leitet die Klasse von Änderungsmaßen her. Im darauffolgenden Abschnitt werden Aussagen zur asymptotischen Verteilung von Schätzern für diese Maße gemacht. Außerdem wird die Sensitivität der dynamischen Ungleichheitsmaße behandelt.

2 Grundlagen

Bevor die Axiome für dynamische Ungleichheitsmaße definiert werden, sollen noch einige Notationen erwähnt werden. Folgende Bezeichnungen für Mengen werden benutzt:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n_+ &= \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, x_i \geq 0\} \\ \mathcal{D}_+ &= \bigcup_{n=2}^{\infty} \mathbb{R}^n_+ \\ \mathcal{F} &= \text{Menge aller Verteilungsfunktionen auf } \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Die Definition für ein Ungleichheitsmaß ist im weitesten Sinne:

Definition:
Eine Funktion $g : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ heißt Ungleichheitsmaß, wenn sie die Pigou–Dalton–Bedingung erfüllt.

Da die Maße auf Verteilungsfunktionen definiert sind, ist dies äquivalent damit, daß g lorenz–konsistent ist (siehe Pflug (1979), Satz 1). Dies bedeutet:

$$G \geq_L F \Rightarrow g(G) \geq g(F)$$

mit $G \geq_L F \Leftrightarrow L_F(p) \geq L_G(p) \quad \forall p \in [0,1]$ und L_F die Lorenzkurve von F.

$D(F, G) : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet das dynamische Ungleichheitsmaß.

Im folgenden werden die Axiome für $D(F, G)$ beschrieben.

Allgemein sollte gelten, daß eine Reduktion der Ungleichheit zu einem negativen Wert und die Zunahme zu einem positiven Wert führt. Wenn die Verteilungsfunktion G durch eine Robin–Hood–Transformation aus der Verteilungsfunktion F entstanden ist, soll daß Maß also kleiner oder gleich Null sein. Wenn G aus F durch eine Robin–Hood–Transformation entstanden ist, so ist G Pigou–Dalton dominant über F. Dies ist äquivalent damit, daß G Lorenz–dominant bezüglich F ist (siehe Pflug (1979), Satz 1). Also läßt sich die Pigou–Dalton–Bedingung für dynamische Ungleichheitsmaße wie folgt definieren:

$$\text{(PD)} \quad G \leq_L F \Rightarrow D(F, G) \leq 0.$$

Um die Werte des Index interpretieren zu können, muß der Wertebereich bekannt sein. Außerdem ist es für einen Vergleich von verschiedenen dynamischen Ungleichheitsmaßen sinnvoll, daß sie alle auf den gleichen Bereich normiert sind. Deshalb soll bei maximaler Ungleichheitszunahme der Wert Eins und bei maximaler Abnahme der Wert minus Eins angenommen werden. Weiterhin soll der Index den Wert Null annehmen, wenn sich die Verteilungsfunkion nicht geändert hat (Normierung):

$$\text{(N)} \quad \begin{array}{ll} \text{(i)} & \Leftrightarrow 1 \leq D(F, G) \leq 1 \\ \text{(ii)} & D(F, F) = 0. \end{array}$$

Die zweite Forderung bedeutet nicht, daß aus $D(F, G) = 0$ die Gleichheit von F und G folgt.

Vertauscht man Ausgangs– und Vergleichsperiode, so bleibt das Ausmaß der Änderung bestehen. Es wechselt nur die Richtung der Änderung. Deshalb soll gelten: Vertauscht man Ausgangs– und Vergleichsperiode, so ändert sich nur das Vorzeichen des dynamischen Maßes (Symmetrie):

$$\text{(S)} \quad D(F, G) = \Leftrightarrow D(G, F).$$

Läßt sich der Beobachtungszeitraum in mehrere Perioden zerlegen, so soll die Gesamtänderung in die Summe der Einzeländerungen zerlegbar sein. Dies liefert eine einfache Handhabung bei der Berechnung von Änderungen über größere Zeiträume hinweg. Außerdem ermöglicht es, zu erkennen, wie sich die Gesamtänderung zusammensetzt. So kann die Gesamtänderung Null sein, obwohl die Ungleichheit in der ersten Periode stark zugenommen und in der zweiten Periode (genauso) stark wieder abgenommen hat. Dieses Axiom sichert also weitere Informationen über das Verhalten der Änderung im gesamten Zeitraum (Additive Konsistenz):

$$\text{(AK)} \quad D(F, G) = D(F, H) + D(H, G).$$

Dies sind die Axiome die von den dynamischen Maßen erfüllt werden sollen.

Das nachfolgende Lemma zeigt eine Beziehung zwischen den Axiomen, welche für den Beweis von Satz 1 benötigt wird.

Lemma:

(AK) $\Rightarrow$ (S), (N)(ii)

Beweis:
(AK) $\Rightarrow$ (N)(ii)
Betrachte $D(F,F)$. Aus der Additiven Konsistenz folgt:

$$\begin{aligned} D(F,F) &= D(F,F) + D(F,F) \\ \Leftrightarrow D(F,F) &= 0 \end{aligned}$$

(AK) $\Rightarrow$ (S)

$$\begin{aligned} 0 &\overset{(N)(ii)}{=} D(F,F) \overset{(AK)}{=} D(F,G) + D(G,F) \\ &\Leftrightarrow \quad D(F,G) = \Leftrightarrow D(G,F) \end{aligned}$$

$\square$

3 Eine Klasse von dynamischen Ungleichheitsmaßen

Resultat des folgenden Satzes ist, daß die Maße, welche die Axiome Pigou–Dalton für dynamische Ungleichheitsmaße, Symmetrie, Normierung und Additive Konsistenz erfüllen, nur die normierte Differenz einer lorenz–konsistenten Funktion (und damit eines Ungleichheitsmaßes) sein können. Wegen des obigen Lemmas müssen nur die Axiome (N)(i), (PD) und (AK) betrachtet werden.

Satz 1:
Sei $D(F,G) : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \Rightarrow \mathrm{I\!R}$. Dann gilt:

$$D(F,G) \text{ erfüllt (N)(i), (PD) und (AK)} \quad \Leftrightarrow \quad D(F,G) = \frac{g(G) \Leftrightarrow g(F)}{\max g \Leftrightarrow \min g}$$

mit einer lorenz–konsistenten Funktion $g : \mathcal{F} \to \mathrm{I\!R}$ und endlichen

$$\max g := \max_{\forall F \in \mathcal{F}} g(F) \quad \text{und} \quad \min g := \min_{\forall F \in \mathcal{F}} g(F).$$

Beweis:
„$\Rightarrow$"
Aus der Additiven Konsistenz folgt:

$$\begin{aligned} D(F,G) &= D(F,H) + D(H,G) \\ &\overset{(S)}{=} D(H,G) \Leftrightarrow D(H,F) \text{ für ein } H \in \mathcal{F}. \end{aligned} \tag{1}$$

Da die linke Seite von H unabhängig ist, gilt dies auch für die rechte Seite. Somit kann man H durch eine Konstante ersetzen. Dies sei hier die Dirac–Funktion $\mathcal{E}_a$ mit:

$$\mathcal{E}_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < a \\ \\ 1 & \text{für} \quad x \geq a \end{cases} .$$

Damit ist $D(H,G)$ eine Funktion von einer Variablen und aus (1) folgt:

$$\begin{aligned} D(F,G) &= D(\mathcal{E}_a, G) \Leftrightarrow D(\mathcal{E}_a, F) \\ &= f(G) \Leftrightarrow f(F) \end{aligned} \tag{2}$$

mit $f(F) := D(\mathcal{E}_a, F) \, : \, \mathcal{F} \to \mathbb{R}$.

Mit der Pigou–Dalton–Bedingung für dynamische Maße gilt:

$$\begin{aligned} G \leq_L F \quad &\Rightarrow \quad D(F,G) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad f(G) \Leftrightarrow f(F) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad f(G) \leq f(F). \end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß f lorenz–konsistent sein muß.

Um das Axiom der Normierung ausnutzen zu können, wird f etwas anders geschrieben. Die Funktion $f(F) := a \cdot g(F)$ mit $a > 0$ ist nur dann lorenz–konsistent, wenn auch g lorenz–konsistent ist. Einsetzen dieser Funktion in (2) ergibt:

$$D(F,G) = a \cdot (g(G) \Leftrightarrow g(F)) \, . \tag{3}$$

Das Axiom der Normierung fordert, daß das Maximum des dynamischen Maßes gleich Eins sein soll. Dies bedeutet:

$$\begin{aligned} \max_{\forall F,G \in \mathcal{F}} D(F,G) &= 1 \\ \Leftrightarrow \qquad \max_{\forall F,G \in \mathcal{F}} (a \cdot (g(G) \Leftrightarrow g(F))) &= 1 \\ \Leftrightarrow \qquad a \cdot \left(\max_{\forall G \in \mathcal{F}} g(G) \Leftrightarrow \min_{\forall F \in \mathcal{F}} g(F) \right) &= 1 \\ \Leftrightarrow \qquad a \cdot (\max g \Leftrightarrow \min g) &= 1 \\ \Leftrightarrow \qquad a &= \frac{1}{\max g \Leftrightarrow \min g}, \end{aligned}$$

falls $\max g$ und $\min g$ endlich sind. Dies bedeutet, daß g beschränkt ist.

Aus (3) wird:

$$D(F,G) = \frac{g(G) \Leftrightarrow g(F)}{\max g \Leftrightarrow \min g}$$

mit einer lorenz–konsistenten Funktion $g \, : \, \mathcal{F} \to \mathbb{R}$.

„⇐“
Wegen

$$\begin{aligned}
D(F,G) &= \frac{g(G) \Leftrightarrow g(F)}{\max g \Leftrightarrow \min g} = \frac{g(G) \Leftrightarrow g(H) + g(H) \Leftrightarrow g(F)}{\max g \Leftrightarrow \min g} \\
&= \frac{g(G) \Leftrightarrow g(H)}{\max g \Leftrightarrow \min g} + \frac{g(H) \Leftrightarrow g(F)}{\max g \Leftrightarrow \min g} \\
&= D(H,G) + D(F,H)
\end{aligned}$$

gilt die Additive Konsistenz.

Da g lorenz–konsistent ist, gilt:

$$G \leq_L F \Rightarrow g(F) \geq g(G).$$

Daraus folgt für $D(F,G)$:

$$D(F,G) = \frac{\overbrace{g(G) \Leftrightarrow g(F)}^{\leq 0}}{\underbrace{\max g \Leftrightarrow \min g}_{>0}} \leq 0.$$

Damit ist auch die Pigou–Dalton–Bedingung für dynamische Maße erfüllt.

Zuletzt folgt (N)(i) mit:

$$\begin{aligned}
g(G) \Leftrightarrow g(F) &\leq |\max g \Leftrightarrow \min g| \\
\Leftrightarrow \Leftrightarrow (\max g \Leftrightarrow \min g) &\leq g(G) \Leftrightarrow g(F) \leq \max g \Leftrightarrow \min g \\
\Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{\max g \Leftrightarrow \min g}{\max g \Leftrightarrow \min g} &\leq \frac{g(G) \Leftrightarrow g(F)}{\max g \Leftrightarrow \min g} \leq \frac{\max g \Leftrightarrow \min g}{\max g \Leftrightarrow \min g} \\
\Leftrightarrow \Leftrightarrow 1 &\leq D(F,G) \leq 1.
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Wie Satz 1 zeigt, hängen die dynamischen Ungleichheitsmaße nur von einer lorenz–konsistenten Funktion ab, also von einem Ungleichheitsmaß. Als Ergebnis folgt: Ein dynamisches Ungleichheitsmaß, welches die Axiome erfüllt, ist die (normierte) Differenz der Ungleichheitsmaße der beiden Perioden. Dynamische Ungleichheitsmaße, welche auf Beobachtungswerten basieren, sind ein Spezialfall von Satz 1. Man erhält sie, indem man für F und G die empirischen Verteilungsfunktionen von x und y einsetzt. Diese Maße sind dann nur noch von den Beobachtungswerten $(x_1, \ldots, x_n)$ bzw. $(y_1, \ldots, y_m)$ und der Anzahl der Beobachtungswerte n bzw. m abhängig. Damit lassen sich die dynamischen Indices in diesem Fall als Funktionen von x und y schreiben. Daraus folgt, daß hier auch Maße für absolute Konzentration (z.B. Herfindahl–Index) in dieser Klasse von dynamischen Indices enthalten sind.

Satz 2:
Sei $D(x,y) : \mathcal{D}_+ \times \mathcal{D}_+ \Rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$D(x,y) \text{ erfüllt (N)(i), (PD) und (AK)} \quad \Leftrightarrow \quad D(x,y) = \frac{g(y) \Leftrightarrow g(x)}{\max g \Leftrightarrow \min g}$$

mit einer schur–konvexen Funktion $g : \mathcal{D}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ und endlichen

$$\max g := \max_{\forall x \in \mathcal{D}_+} g(x) \quad \text{und} \quad \min g := \min_{\forall x \in \mathcal{D}_+} g(x).$$

Im Unterschied zu Satz 1 ist g hier eine schur–konvexe Funktion. Warum sollte also Satz 2 ein Spezialfall von Satz 1 sein? Dies ist leicht zu sehen, wenn man sich überlegt, das Schur–Konvexität äquivalent mit der Erfüllung der Pigou–Dalton–Bedingung ist. Sie ist also das diskrete Analogon zur Lorenz–Konsistenz.

Wie man sieht, ist die in diesem Abschnitt hergeleitete Klasse von dynamischen Ungleichheitsmaßen leicht zu berechnen. Dies gilt insbesondere dann, wenn die Werte des zugrundeliegenden Ungleichheitsmaßes vorliegen und seine Grenzen bekannt sind.

Ein Nachteil besteht darin, daß man Ungleichheitsmaße nur für die Konstruktion eines dynamischen Maßes benutzen kann, wenn die Grenzen des Ungleichheitsmaßes endlich sind. So läßt sich das Maß von Theil nur in seiner normierten Form (siehe z.B. Dagum (1993), S.14) verwenden, da seine Obergrenze $log(n)$ ist. Somit würde man bei der Berechnung des dynamischen Maßes immer durch unendlich teilen und damit als Wert für das Maß immer Null bekommen.

4 Asymptotische Verteilung eines Schätzers für dynamische Ungleichheitsmaße

Da man in der Regel die Verteilungsfunktionen F und G nicht kennt, kann man auch $D(F,G)$ nicht ausrechnen. Also muß man es schätzen. Um das Maß zu schätzen, bietet es sich an, die Funktionale $g(F)$ bzw. $g(G)$ zu schätzen. Somit ist

$$D(\hat{F},\hat{G}) = \frac{g(\hat{G}) \Leftrightarrow g(\hat{F})}{\max g \Leftrightarrow \min g}.$$

Für Erwartungswert und Varianz gelten:

$$\begin{aligned} E(D(\hat{F},\hat{G})) &= \frac{1}{\max g \Leftrightarrow \min g}\left[E(g(\hat{G})) \Leftrightarrow E(g(\hat{F}))\right], \\ Var(D(\hat{F},\hat{G})) := \sigma_D^2 &= \left(\frac{1}{\max g \Leftrightarrow \min g}\right)^2 \left[\sigma^2_{g(\hat{G})} + \sigma^2_{g(\hat{F})} \Leftrightarrow 2\sigma_{g(\hat{G}),g(\hat{F})}\right]. \end{aligned}$$

Ist $g(\hat{\cdot})$ erwartungstreu, so folgt daraus sofort die Erwartungstreue von $D(\hat{F},\hat{G})$. Gilt außerdem

$$\begin{pmatrix} \sqrt{n}(g(\hat{G}) \Leftrightarrow g(G)) \\ \sqrt{n}(g(\hat{F}) \Leftrightarrow g(F)) \end{pmatrix}$$

ist asymptotisch normalverteilt mit Erwartungswert Null und Kovarianzmatrix

$$\begin{pmatrix} \sigma^2_{g(\hat{G})} & \sigma_{g(\hat{G}),g(\hat{F})} \\ \sigma_{g(\hat{G}),g(\hat{F})} & \sigma^2_{g(\hat{F})} \end{pmatrix},$$

so ist (Rao 1973 (Kapitel 6)):

$$\sqrt{n}\left[((g(\hat{G}) \Leftrightarrow g(\hat{F})) \Leftrightarrow (g(G) \Leftrightarrow g(F))\right] \overset{as.}{\sim} N(0,\sigma^2)$$

mit

$$\sigma^2 = \sigma^2_{g(\hat{G})} + \sigma^2_{g(\hat{F})} \Leftrightarrow 2\sigma_{g(\hat{G}),g(\hat{F})}.$$

Damit ist

$$\sqrt{n}\left[D(\hat{F},\hat{G}) \Leftrightarrow D(F,G)\right] \overset{as.}{\sim} N(0,\sigma_D^2)$$

mit

$$\sigma_D^2 = \left(\frac{1}{\max g \Leftrightarrow \min g}\right)^2 \sigma^2.$$

Benutzt man also ein Ungleichheitsmaß (z.B. Gini) mit einem erwartungstreuen und asymptotisch normalverteilten Schätzer, so ist der Schätzer für das dynamische Ungleichheitsmaß auch erwartungstreu und asymptotisch normalverteilt, weil die Linerakombination von zwei normalverteilten Zufallsvariablen wieder normalverteilt ist. Da es sich hier bei den Funktionalen um Ungleichheitsmaße handelt (Satz 1), kann man Ergebnisse von Arbeiten über die Verteilung von Schätzern von Ungleichheitsmaßen anwenden (siehe z.B. Kakwani (1991)).

Es stellt sich natürlich die Frage, wie ein dynamisches Maß auf Änderungen in seinen beiden Argumenten reagiert. Diese Änderung wird Sensitivität genannt und soll nun untersucht werden. Dabei folgt diese Arbeit der Definition von Sensitivität, welche Schmid (1991) eingeführt hat. Diese lautet im Fall von Beobachtungsvektoren:

$$S_n(i,j|x_{(1)},\ldots,x_{(n)}) := \frac{\partial}{\partial x_i} g(x_1,\ldots,x_n) \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} g(x_1,\ldots,x_n)$$

und im Fall von stetigen Verteilungsfunktionen:

$$S(i,j) := \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot S_n([n\alpha],[n\beta]|X_{(1)},\ldots,X_{(n)})\right)$$

mit $0 < \alpha < \beta < 1$ und $[m] := \min\{k \in \mathbb{N} | k \geq m\}$, wobei dieser Grenzwert mit Wahrscheinlichkeit 1 existiert (siehe Schmid (1991), S. 163).

Mit $S_n(i,j)$ wird die Auswirkung eines Transfers von x_i zu x_j angegeben. Bei dynamischen Ungleichheitsmaßen soll die Sensitivität gerade die Auswirkung von je einem Transfer in den beiden Argumenten sein. So läßt sich untersuchen, wie dieser Index bei Ungleichheitszunahme oder –abnahme in beiden Argumenten reagiert, aber auch wie er sich bei Zunahme in einem Argument und Abnahme im anderen verändert.

Sei $a > 0$ eine reelle Zahl. Ausgehend von der absoluten Änderung:

$$\begin{aligned}
&\Delta(a|i,j,k,l) \\
&= D(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) \\
&\quad \Leftrightarrow D(x_1,\dots,x_j+a,\dots,x_i \Leftrightarrow a,\dots,x_n,y_1,\dots,y_l+a,\dots,y_k \Leftrightarrow a,\dots,y_n) \\
&= \frac{1}{\max g \Leftrightarrow \min g}\,[g(y) \Leftrightarrow g(x) \Leftrightarrow g(y_1,\dots,y_l+a,\dots,y_k \Leftrightarrow a,\dots,y_n) \\
&\quad + g(x_1,\dots,x_j+a,\dots,x_i \Leftrightarrow a,\dots,x_n)]
\end{aligned}$$

wird der erste Faktor der Taylorreihenentwicklung um $a = 0$ als Sensitivitätsmaß gewählt (siehe Schmid (1991)). Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&S_n(i,j,k,l|x_{(1)},\dots,x_{(n)},y_{(1)},\dots,y_{(n)}) \\
&= \Delta'(0|i,j,k,l) \\
&= \frac{1}{\max g \Leftrightarrow \min g}\left[\frac{\partial}{\partial y_k}g(y) \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y_l}g(y) + \frac{\partial}{\partial x_j}g(x) \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i}g(x)\right] \\
&= \frac{1}{\max g \Leftrightarrow \min g}\left[S_n(k,l|y_{(1)},\dots,y_{(n)}) \Leftrightarrow S_n(i,j|x_{(1)},\dots,x_{(n)})\right].
\end{aligned}$$

Damit ist die Sensitivität der dynamischen Ungleichheitsmaße nur die mit dem Normierungsfaktor multiplizierte Differenz der Sensitivität der zugrundeliegenden Ungleichheitsmaße.

Für den Fall stetiger Verteilungsfunktionen gilt dies analog, denn:

$$\begin{aligned}
S(\alpha,\beta,\gamma,\delta) &= \lim_{n\to\infty}\left[n\cdot S_n([n\alpha],[n\beta],[n\gamma],[n\delta]|X_{(1)},\dots,X_{(n)},Y_{(1)},\dots,Y_{(n)})\right] \\
&= \frac{1}{\max g \Leftrightarrow \min g}\left[\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot S_n([n\alpha],[n\beta]|Y_{(1)},\dots,Y_{(n)})\right)\right. \\
&\quad \left.\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot S_n([n\gamma],[n\delta]|X_{(1)},\dots,X_{(n)})\right)\right] \\
&= \frac{1}{\max g \Leftrightarrow \min g}\,[S(\alpha,\beta) \Leftrightarrow S(\gamma,\delta)].
\end{aligned}$$

Die Sensitivität der dynamischen Ungleichheitsmaße läßt sich also ganz leicht aus der Sensitivität der zugrundeliegenden Maße herleiten. Andererseits kann man auch die Indices, welche in das dynamische Maß eingehen sollen, so wählen, daß der Index eine gewünschte Sensitivität hat.

Interessiert man sich für das Verhalten des dynamischen Index, wenn nur in einem Argument eine Ungleichheitsänderung vorgenommen wird, so wird diese durch die Sensitivität des benutzten Ungleichheitsmaßes multipliziert mit dem Normierungsfaktor angegeben. Das ist leicht zu sehen, wenn man die absolute Änderung

$$
\begin{aligned}
&\Delta(a|i,j)\\
&\quad= D(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)\\
&\qquad - D(x_1,\ldots,x_j+a,\ldots,x_i-a,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)\\
&\quad= \frac{1}{\max g - \min g}\left[g(y)-g(x)-g(y)+g(x_1,\ldots,x_j+a,\ldots,x_i-a,\ldots,x_n)\right]
\end{aligned}
$$

betrachtet. Die Sensitivität ergibt sich dann zu

$$
\begin{aligned}
S_n(i,j|x_{(1)},\ldots,x_{(n)},y_{(1)},\ldots,y_{(n)}) &= \Delta'(0|i,j)\\
&= \frac{1}{\max g - \min g}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}g(x)-\frac{\partial}{\partial x_i}g(x)\right]\\
&= \frac{1}{\max g - \min g} S_n(i,j|x_{(1)},\ldots,x_{(n)}).
\end{aligned}
$$

Genauso läßt sich dies für Maße zeigen, die auf Verteilungen basieren.

5 Abschließende Bemerkungen

Wie diese Arbeit zeigt, ist ein dynamisches Ungleichheitsmaß, das die Axiome Pigou–Dalton–Bedingung für dynamische Ungleichheitsmaße, Symmetrie, Normierung und Additive Konsistenz erfüllt, die normierte Differenz der Werte eines Ungleichheitsmaßes für die zwei Vergleichsgebiete bzw. –perioden. Von den in der Einleitung vorgestellten Maßen sind nur die Indices von Franke (1989), Piesch (1975) und Weiss (1965) (bis auf die Normierung) von dieser Form.

Bemerkenswert ist die einfache Handhabung dieser Klasse von dynamischen Indices. Man kann bei ihrer Berechnung auf schon vorhandene Werte von Ungleichheitsmaßen zurückgreifen. Damit läßt sich ihr Wert ohne großen Rechenaufwand bestimmen.
Weiterhin kann man auch das Verhalten bei der Änderung von Ungleichheit leicht festlegen, da die Sensitivität der Maße mit der (meistens bekannten) Sensitivität des vorliegenden Ungleichheitsmaßes in einem einfachen funktionalen Zusammenhang steht.
Ein weiterer Vorteil besteht in dem weiten Anwendungsbereich. Die dynamischen Maße können sowohl für Konzentrations– als auch für die Disparitätsmessung eingesetzt werden. Dabei berücksichtigen sie die Eigenschaften der gewählten Änderungsart. Wählt man ein Konzentrationsmaß, so wird die Hinzunahme eines Elementes mit Wert Null nicht als Änderung der Ungleichheit interpretiert. Wählt man hingegen ein Disparitätsmaß, so wird im eben erwähnten Fall eine Ungleichheitsänderung angezeigt. Dafür reagiert der Index nicht auf eine Verdoppelung des Beobachtungsvektors, was ja auch nicht zu einer Veränderung der Disparität führt.

Gefährlich ist hier natürlich die Manipulationsmöglichkeit des Ergebnisses. Man kann das Ungleichheitsmaß so wählen, daß die Änderung in den Daten so interpretiert wird, wie man es in einem bestimmten Fall gerne haben möchte. Hat sich zum Beispiel die Konzentration im oberen Wertebereich geändert, und man will eine kleine Änderung angezeigt haben, so könnte man einen Konzentrationsindex wählen, der in diesem Bereich nicht sensitiv ist. Umgekehrt kann man eine große Änderung erhalten, wenn man ein Maß mit hoher Sensitivität im oberen Bereich wählt. Diese Gefahr kann man umgehen, indem man zuerst das dynamische Ungleichheitsmaß festlegt und dann erst die Daten betrachtet.

Literaturverzeichnis

Bruckmann, G. (1969): Einige Bemerkungen zur statistischen Messung der Konzentration. *Metrika*, 14, 184–213.

Dagum, C. (1993): The social welfare bases of Gini and other income inequality measures. *Statistica*, LIII, 3–30.

Franke, J. (1989): Komponentenzerlegung der Konzentrationsentwicklung auf der Grundlage des Exponentialindex. *Allgemeines Statistisches Archiv*, 73, 323–345.

Grossack, I.M. (1965): Towards an integration of static and dynamic measures of industry concentration. *Review of Economics and Statistics*, 47, 301–308.

Hart, P.E. und Prais, S.J. (1956): The analysis of business concentration: A statistical approach. *Journal of the Royal Statistical Society*, Ser. A, 119, 150–181.

Kahnwald, H. (1974): Ein „dynamisches“ Konzentrationsmaß. *Allgemeines Statistisches Archiv*, 58, 143–159.

Kakwani, N. (1991): Large sample distribution of several inequality measures: Whith applications to Côte d'Ivoire in: *Cartes, R.A.L.; Dutta, J. and Ullah, A., Contributions to econometrics: Theory and application*, Springer N.Y.

Lorenzen, G. (1979): Zerlegbare dynamische Konzentrationsmessung. *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, 194, 165–188.

Pflug, G. (1979): Statistische Konzentrationsmaße – ein mathematischer Überblick. *Allgemeines Statistisches Archiv*, 63, 240–259.

Piesch, W. (1975): *Statistische Konzentrationsmaße*. Mohr, Tübingen.

Rao, C.R. (1973): *Linear stastistical inference and its applications*, second edition, John Wiley & Sons, N.Y.

Schmid, F. (1991): Zur Sensitivität von Disparitätsmaßen. *Allgemeines Statistisches Archiv*, 75, 155–167.

Schmid, F. (1994): Zur Messung der interdistributionellen Einkommensungleichheit / Theoretische Begründung und deskriptive Verfahren. *Allgemeines Statistisches Archiv*, 78, 401–420.

Stich, A. (1993): *Symmetrische Messung der Änderung von Einkommens– und Unternehmenskonzentration.* Diplom–Arbeit Fachbereich Statistik, Universität Dortmund.

Weiss, L.W. (1965): An evaluation of mergers in six industries. *Review of Economics and Statistics*, 47, 172–181.