

# Über die Anwendbarkeit eines neuen Fluktuationstests für Korrelationen auf Finanzzeitreihen

Dominik Wied\*

*TU Dortmund*

*Fakultät Statistik*

*44221 Dortmund*

*E-Mail: wied@statistik.tu-dortmund.de*

Matthias Arnold

*TU Dortmund*

*Fakultät Statistik*

*44221 Dortmund*

*E-Mail: arnold@statistik.tu-dortmund.de*

Nicolai Bissantz

*Ruhr-Universität Bochum*

*Fakultät für Mathematik*

*44780 Bochum*

*E-Mail: nicolai.bissantz@rub.de*

Daniel Ziggel

*quasol GmbH*

*Marktallee 8*

*48165 Münster*

*E-Mail: daniel.ziggel@quasol.de*

5. Juli 2012

## Zusammenfassung

*Auf Deutsch:* Wir untersuchen einen neuen Fluktuationstest auf konstante Korrelationen bezüglich seiner Eigenschaften und möglicher Anwendungen im Finanzsektor. Dabei werden durch eine Simulationsstudie einerseits seine Eigenschaften selbst und Unterschiede im Vergleich zu einem älteren Standardverfahren untersucht. Andererseits wenden wir den Test auf reale Finanzzeitreihen an, bewerten die Resultate im Hinblick auf ihre Plausibilität und zeigen weitere potenzielle Anwendungsmöglichkeiten auf. Die Ergebnisse legen nahe, dass sich der Test für den praktischen Einsatz in der Finanzwirtschaft eignet.

*Auf Englisch:* We analyze a new fluctuation test for constant correlation with respect to its properties and possible applications in finance. On the one hand, a simulation study examines the properties particularly with regard to a comparison with a previous standard method. On the other hand, we apply the test on real financial time series, evaluate the results with respect to their plausibility and reveal potential fields for further applications. The results indicate that the test is useful for practical applications in finance.

*Stichwörter (auf Deutsch):* Korrelation; Strukturbrüche; Portfoliooptimierung

*Keywords (auf Englisch):* Correlation; Structural break; Portfolio optimization

*JEL:* C12, C14, G01, G11

---

\*korrespondierender Autor

## 1 Einleitung

Im Zuge von Finanzmarkturbulenzen verändern sich die relevanten Marktparameter meistens sehr schnell und heftig. So konnte zum Beispiel während der Finanzkrise ab 2007 beobachtet werden, dass sich Volatilitäten von und Korrelationen zwischen Zinssätzen, Wertpapierrenditen, Wechselkursen und ähnlichen Finanzmarktvariablen drastisch erhöhten, was zu einer falschen Schätzung von Risikokennzahlen führte (Bissantz et al., 2011). Dieses Phänomen ist inzwischen gründlich dokumentiert und wird in der Literatur auch als *correlation breakdown* bezeichnet (Zimmermann et al., 2002).<sup>1</sup> Somit muss davon ausgegangen werden, dass die Marktparameter im Zeitablauf nicht als konstant angenommen werden können (Longin & Solnik, 1995; Krishan et al., 2009, neben vielen anderen). Insbesondere Korrelationen von Aktienrenditen scheinen in Krisenzeiten zuzunehmen (Sancetta & Satchell, 2007).

Das Ansteigen von Korrelationen der Renditen hat dabei zum Beispiel ernsthafte Konsequenzen für die Zusammenstellung effizienter Portfolios, die auf Diversifikationseffekten beruht. Sobald sich die relevanten Parameter (z.B. Korrelationen) geändert haben, ist die Portfoliozusammensetzung nicht mehr optimal und die geschätzten Risikokennzahlen sind nicht mehr korrekt spezifiziert (Bissantz et al., 2011). Ähnliche Probleme treten bei Anwendungen im Risikomanagement oder bei der Bewertung von Derivaten auf. Überraschenderweise gab es in der Literatur über eine lange Zeit kaum Methoden, um formal auf Parameteränderungen zu testen, obwohl es im Bereich der Regressionsanalyse mindestens seit dem Ansatz von Chow (1960) viele Arbeiten zum Thema Strukturbrüche gibt. In der Praxis werden solche Verfahren bis heute so gut wie gar nicht verwendet.

Die meisten älteren Methoden benötigen starke parametrische Annahmen (Dias & Embrechts, 2004), nehmen die Zeitpunkte der Parameteränderungen als bekannt an (Pearson & Wilks, 1933; Jennrich, 1970; Goetzmann et al., 2005), oder schätzen die Korrelationen aus rollierenden Fenstern, ohne formale Entscheidungsregeln anzugeben (Longin & Solnik, 1995). In jüngster Vergangenheit stellten jedoch Aue et al. (2009) einen formalen Test auf die Änderung der Kovarianzstruktur vor, der kein Vorwissen bezüglich möglicher Parameteränderungen benötigt. Der Test basiert auf sukzessiv berechneten Kovarianzmatrizen (in Anlehnung an Ploberger et al., 1989) und verwirft die Nullhypothese einer konstanten Kovarianzstruktur, wenn die Folge dieser Matrizen zu stark schwankt. Daneben führten Wied et al. (2011a) kürzlich einen ähnlichen Test auf Änderungen der Varianz ein und wandten diesen auf Finanzdaten an.

In dieser Arbeit untersuchen wir einen Test, der von Wied et al. (2012) (bzw. Wied, 2009) entwickelt wurde und auf Fluktuationen bei Korrelationen testet. Die Teststatistik ist ein geeignetes standardisiertes Maximum von sukzessiv geschätzten Korrelationskoeffizienten. Dabei handelt es sich um einen nichtparametrischen Test, der unter schwachen Annahmen gültig ist und kein

---

<sup>1</sup>Interessanterweise suggeriert dieser Begriff eine Auflösung bzw. zumindest einen Rückgang von Korrelationen. Allerdings ist gerade das Gegenteil davon gemeint.

Vorwissen bezüglich möglicher Parameteränderungen erfordert.

Der Aufbau dieses Artikels ist wie folgt. Zuerst wird die Teststatistik eingeführt und die wesentlichen theoretischen Eigenschaften werden erläutert. Danach folgt eine Simulationsstudie, in welcher der Fluktuationstest mit dem häufig verwendeten Test von Jennrich (1970) verglichen wird. Im danach folgenden Kapitel wenden wir den Fluktuationstest auf stetige Renditen bei realen Finanzzeitreihen an. Die Arbeit endet mit einer Zusammenfassung bzw. einem Ausblick.

## 2 Teststatistik

In diesem Kapitel beschreiben wir den Test auf konstante Korrelation von Wied et al. (2012). Sei  $(X_t, Y_t), t = 1, 2, \dots, T$ , eine Folge von bivariaten Zufallsvektoren mit endlichen ersten vier absoluten Momenten. Wir können uns darunter zum Beispiel die Renditen auf Basis der täglichen Schlusskurse des Deutschen Aktienindex (DAX) und des Deutschen Rentenindex (REX) vorstellen. Die Annahme endlicher erster vier Momente ist relativ restriktiv, weil zumindest theoretisch sogar unendliche Varianzen bei Finanzmarktrenditen möglich sind (vgl. Mandelbrot, 1962), ist aber zur Herleitung der asymptotischen Verteilung unserer Teststatistik notwendig. Unsere aktuelle Forschung beschäftigt sich mit der Konstruktion von passenden Strukturbruchtests für robuste Zusammenhangsmaße, welche ohne endliche Momente auskommen (vgl. Dehling et al., 2012 und Wied et al., 2011b).

Hinsichtlich der seriellen Abhängigkeit nehmen wir an, dass  $(X_t, Y_t)$  *near epoch dependent* bezüglich einer stark mischenden oder gleichmäßig mischenden Folge von Zufallsvariablen ist, was eine Verallgemeinerung von asymptotischer Unabhängigkeit bedeutet. Bezüglich Stationarität fordern wir, dass die unbedingten Erwartungswerte und Varianzen und die unbedingte Kovarianz im Zeitablauf „fast konstant“ sind (vgl. Wied et al., 2012 für Details). Die Annahmen erlauben unter anderem die Anwendung des Tests auf stationäre GARCH-Modelle, in welchen die unbedingte Varianz konstant ist. In der Praxis könnte es bei der Anwendung des Tests auf stark volatile Zeitreihen Schwierigkeiten geben (vgl. Wied, 2009, S. 58 ff.); zur Vermeidung dieses Problems ist es eventuell sinnvoll, den Test auf geglättete, normierte oder gefilterte Zeitreihen, etwa auf GARCH-Residuen, anzuwenden. Für Details der technischen Annahmen verweisen wir auf Wied et al. (2012).

Es soll getestet werden, ob die Korrelation zwischen  $X_t$  und  $Y_t$ ,

$$\rho_t = \frac{Cov(X_t, Y_t)}{\sqrt{Var(X_t)}\sqrt{Var(Y_t)}},$$

im Zeitablauf konstant ist oder nicht. Bei dem Test handelt es sich um einen sogenannten Omnibus-Test, bei dem die Korrelationsstruktur unter der Alternative nicht näher spezifiziert

ist. Formal lautet das Testproblem

$$H_0 : \rho_1 = \dots = \rho_T \text{ vs. } H_1 : \exists t \in \{1, \dots, T-1\} : \rho_t \neq \rho_{t+1}.$$

Die Teststatistik lautet

$$\hat{D} \max_{2 \leq j \leq T} \frac{j}{\sqrt{T}} |\hat{\rho}_j - \hat{\rho}_T| \quad (1)$$

mit

$$\hat{\rho}_j = \frac{\sum_{i=1}^j (X_i - \bar{X}_j)(Y_i - \bar{Y}_j)}{\sqrt{\sum_{i=1}^j (X_i - \bar{X}_j)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^j (Y_i - \bar{Y}_j)^2}}$$

und  $\bar{X}_j = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j X_i$ ,  $\bar{Y}_j = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j Y_i$ .

Der Ausdruck  $\hat{\rho}_j$  beschreibt den empirischen Korrelationskoeffizienten der ersten  $j$  Beobachtungen. Der Test verwirft die Nullhypothese konstanter Korrelation, wenn die empirischen Korrelationen zu stark schwanken, was durch  $\max_{2 \leq j \leq T} |\hat{\rho}_j - \hat{\rho}_T|$  gemessen wird. Der Vorfaktor  $\frac{j}{\sqrt{T}}$  gewichtet Abweichungen am Anfang des Untersuchungszeitraums herunter, da  $\hat{\rho}_j$  dort konstruktionsbedingt stärker schwankt. Der Schätzer  $\hat{D}$  berücksichtigt die Volatilitäten von  $X_t$  und  $Y_t$  sowie die serielle Abhängigkeit von  $(X_t, Y_t)$  und bewirkt, dass die asymptotische Verteilung unter der Nullhypothese standardisiert ist und nicht vom konkreten datengenerierenden Prozess abhängt. Der Schätzer ist relativ umständlich aufzuschreiben, kann jedoch recht einfach aus den Daten berechnet werden. Die exakte Formel findet sich im Anhang.

Der Schätzer hängt von der Wahl einer Kernfunktion und einer Bandbreite ab, wobei die konkrete Wahl jedoch die Grenzverteilung nicht ändert. Für unsere Anwendungen wählen wir den Bartlett-Kern, damit  $\hat{D}$  auch für kleine Stichproben wohldefiniert ist, und wählen  $[\log(T)]$  als Bandbreite. Hierbei ist  $[\cdot]$  die Gaußklammer.

Nach einer Transformation der Zeitachse von  $t \in \{2, \dots, T\}$  zu  $z \in [0, 1]$ , kann die Teststatistik umgeschrieben werden als

$$\sup_{0 \leq z \leq 1} \left| \hat{D} \frac{\tau(z)}{\sqrt{T}} (\hat{\rho}_{\tau(z)} - \hat{\rho}_T) \right|$$

wobei  $\tau(z) = [2 + z(T-2)]$ . Die asymptotische Verteilung unter der Nullhypothese ist die Verteilung von  $\sup_{0 \leq z \leq 1} |B(z)|$ , wobei  $B$  eine eindimensionale Brownsche Brücke ist.

Für die Verteilungsfunktion dieser Verteilung gibt es eine explizite Darstellung (siehe Billingsley, 1968, S. 85). Unter Verwendung der Quantile dieser Verteilung erhalten wir einen asymptotischen Test für unser Problem. Konkret verwerfen wir die Nullhypothese einer konstanten Korrelation, wenn

$$\hat{D} \max_{2 \leq j \leq T} \frac{j}{\sqrt{T}} |\hat{\rho}_j - \hat{\rho}_T| > q_{1-\alpha}, \quad (2)$$

wobei  $q_{1-\alpha}$  das  $(1 - \alpha)$ -Quantil von  $\sup_{0 \leq z \leq 1} |B(z)|$  ist. Das Quantil kann entweder durch Inversion der Verteilungsfunktion oder durch Simulationen bestimmt werden. Konkrete Werte sind etwa 1,224 für  $\alpha = 10\%$ , 1,358 für  $\alpha = 5\%$  und 1,628 für  $\alpha = 1\%$ . Wird die Nullhypothese verworfen, so sprechen wir von einem Strukturbruch.

### 3 Simulationsstudie

Generell gibt es in der Literatur wenige Arbeiten, die sich mit dem Testen auf konstante Korrelation beschäftigen. Der bekannteste Test dürfte der  $\chi^2$ -Test von Jennrich (1970) sein, der häufig für Finanzzeitreihen verwendet wird, obwohl er eigentlich gar nicht für Anwendungen im Finanzbereich konstruiert wurde. Beispielsweise nutzen Bracker & Koch (1999) den Test, um die Stabilität der Korrelationsstruktur von Aktienrenditen zu testen und die Struktur bzw. die Änderungen der Struktur durch verschiedene Faktoren zu erklären. Eine weitere Anwendung findet sich zum Beispiel bei Kaplanis (1988), der auf konstante Korrelationen von Aktienrenditen testet.

Die Anwendbarkeit des Tests von R. Jennrich für derartige Problemstellungen ist jedoch limitiert und es ist fraglich, ob die Annahmen erfüllt sind. So wird vorausgesetzt, dass die gesamte Zeitreihe von vornherein in zwei bekannte Teile der Länge  $n_1$  und  $n_2$  unterteilt wird und die Korrelation in diesen Teilen jeweils konstant ist. Der Test überprüft dann, ob sich die Korrelation in diesen Teilreihen unterscheidet. Dazu wird angenommen, dass die Teilreihen jeweils unabhängig identisch normalverteilte Zufallsvektoren und untereinander unabhängig sind. In der Praxis besitzen jedoch gerade Aktienrenditen deutlich schwerere Ränder, so dass die Annahme der Normalverteilung zweifelhaft ist und beispielsweise eine  $t$ -Verteilung zur Modellierung deutlich realistischer erscheint (siehe etwa Trede & Schmid, 2005, Seite 53 ff.). Somit könnten die Testergebnisse durchaus verfälscht sein. Daneben kann in der Realität nicht davon ausgegangen werden, dass eine präzise Vorahnung bezüglich eines Bruchpunkts der Korrelation existiert und auch die Annahme von serieller Unabhängigkeit der Renditen ist problematisch; werden Renditen etwa, wie häufig in Anwendungen, als GARCH-Prozess modelliert, ist es relativ klar, dass die Rendite zum Zeitpunkt  $t$  von der Rendite zum Zeitpunkt  $t - 1$  abhängt.

Mit Hilfe einer Simulationsstudie soll daher in diesem Kapitel untersucht werden, wie sich Verletzungen der Annahmen auswirken und ob der Test von Wied et al. (2012) für eine Anwendung besser geeignet ist. Dazu untersuchen wir das Verhalten des Fluktuationstests in endlichen Stichproben mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen. Bei allen Simulationen wird ein theoretisches Niveau von 5% angelegt. Es werden jeweils 100000 Wiederholungen durchgeführt und die Zufallsvektoren  $(X_i, Y_i)$  sind jeweils seriell unabhängig mit konstantem Erwartungswert 0 und konstanter Varianz  $Var(X_i) = Var(Y_i) = 1$ . Wir konzentrieren uns auf dieses einfache Szenario, um die wesentlichen Erkenntnisse möglichst prägnant herauszustellen.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Bei schwacher serieller Abhängigkeit ändern sich die Ergebnisse jeweils qualitativ kaum, was Simulationser-

Zunächst überprüfen wir, inwiefern die Tests das Niveau bei normalverteilten Zufallsvariablen einhalten. Hier werden also insbesondere alle Annahmen des Jennrich-Tests eingehalten. Tabelle 1 zeigt die Ergebnisse bei wahrer Nullhypothese und bivariat normalverteilten Zufallsvektoren  $(X_i, Y_i)$  für verschiedene Korrelationen. Beim Test von R. Jennrich teilen wir die Zeitreihe jeweils in gleich große Stücke der Länge  $\frac{T}{2}$  auf. Insgesamt greift die Asymptotik sehr gut, so liegt das wahre Niveau von beiden Tests nahe an 5%. Lediglich bei betragsmäßig hoher Korrelation von  $\rho = 0.9$  greift der neue Fluktuationstest erst bei einer größeren Anzahl von Beobachtungen. Dies könnte bei Anwendungen, in denen die Zeitreihen typischerweise kurz sind (z.B. bei der Berücksichtigung von Neuemissionen), problematisch sein.

Tabelle 1 ungefähr hier

Im zweiten Schritt untersuchen wir, wie sich die Tests verhalten, wenn die Zufallsvektoren nicht normalverteilt sind. Tabelle 2 zeigt Ergebnisse einer Monte-Carlo-Studie bei wahrer Nullhypothese und bivariat  $t_5$ -verteilten Zufallsvektoren  $(X_i, Y_i)$  mit verschiedenen Korrelationen. Wir wählen die  $t_5$ -Verteilung, da die  $t$ -Verteilung einerseits populär bei der Modellierung von Aktienrenditen ist und andererseits bei 5 Freiheitsgraden die ersten vier Momente, welche bei der Herleitung der Grenzverteilung unseres neuen Tests notwendig sind, existieren. Außerdem ist bei der  $t_5$ -Verteilung am besten zu sehen, inwiefern die Tests robust gegen Verteilungen mit schweren Rändern sind. Beim Test von R. Jennrich teilen wir dabei wieder die Zeitreihe in zwei gleich große Teile der Länge  $\frac{T}{2}$  auf.

Der neue Fluktuationstest ist bei  $\rho = 0$  und  $|\rho| = 0.5$  leicht konservativ und bei  $|\rho| = 0.9$  ist zumindest ab  $T = 1000$  das Niveau ebenfalls kleiner als 5% (bei kleineren  $T$  verwirft der Test zu häufig, wobei die Ablehnwahrscheinlichkeiten nicht so groß wie im Fall der Normalverteilung sind). Anscheinend ist der Test also robust gegen schwere Ränder. Auffällig ist, dass das Niveau bei steigendem  $T$  zunächst sinkt, sich also von 5% entfernt, obwohl es für  $T \rightarrow \infty$  gegen 5% konvergiert. Die Konvergenz gegen das wahre Niveau ist also anscheinend nicht monoton. Der Test von R. Jennrich hält das Niveau allerdings in keinem Fall ein und steigt sogar mit wachsendem  $T$ . Das Niveau ist teilweise um mehr als den Faktor 4 zu groß. Der Test ist also offensichtlich nicht robust gegen Abweichungen von der Normalverteilung.

Tabelle 2 ungefähr hier

Abschließend überprüfen wir die Güte der Tests in endlichen Stichproben bei fünf verschiedenen Alternativen mit bivariat  $t_5$ -verteilten Zufallsvektoren  $(X_i, Y_i)$ . Um die starke Niveauüberschreitung beim Jennrich-Test zu berücksichtigen, simulieren wir für verschiedene Werte von  $T$  bei  $\rho = 0$  das tatsächliche empirische 0,95-Quantil der Jennrich-Teststatistik und führen die Gütebetrachtung damit durch. Die Korrelation  $\rho = 0$  wird repräsentativ gewählt, weil Tabelle 2 erkennen lässt, dass das Niveau des Tests zwar von  $T$ , aber kaum von  $\rho$  abhängt. Beim

---

Ergebnisse in Wied et al. (2012) und weitere durchgeführte Simulationen zeigen.

Test von R. Jennrich wird die Zeitreihe wie zuvor stets in zwei gleichgroße Teile der Länge  $\frac{T}{2}$  aufgeteilt. Die betrachteten Alternativen lauten:

1.  $\rho_i = 0,5$  für  $i \in \{1, \dots, \frac{T}{2}\}$  und  $\rho_i = 0,7$  für  $i \in \{\frac{T}{2} + 1, \dots, T\}$
2.  $\rho_i = 0,5$  für  $i \in \{1, \dots, \frac{T}{4}\}$  und  $\rho_i = 0,7$  für  $i \in \{\frac{T}{4} + 1, \dots, T\}$
3.  $\rho_i = -0,5$  für  $i \in \{1, \dots, \frac{T}{2}\}$  und  $\rho_i = 0,5$  für  $i \in \{\frac{T}{2} + 1, \dots, T\}$
4.  $\rho_i = -0,5$  für  $i \in \{1, \dots, \frac{T}{4}\}$  und  $\rho_i = 0,5$  für  $i \in \{\frac{T}{4} + 1, \dots, T\}$
5.  $\rho_i = 0,5$  für  $i \in \{1, \dots, \frac{T}{4}\}$ ,  $\rho_i = 0,7$  für  $i \in \{\frac{T}{4} + 1, \dots, \frac{3}{4}T\}$ ,  
 $\rho_i = 0,5$  für  $i \in \{\frac{3}{4}T + 1, \dots, T\}$

Alternative 1 beschreibt einen Sprung der Korrelation von 0,5 auf 0,7 in der Mitte der Zeitreihe und Alternative 2 denselben Sprung nach dem ersten Viertel der Zeitreihe. Bei Alternative 3 erfolgt ein Sprung von  $-0,5$  auf 0,5 in der Mitte, während bei Alternative 4 derselbe Sprung nach dem ersten Viertel erfolgt. Letztendlich beschreibt Alternative 5 einen Sprung der Korrelation von 0,5 auf 0,7 nach dem ersten Viertel und einen Fall von 0,7 auf 0,5 nach dem dritten Viertel.

Die Ergebnisse sind in Tabelle 3 zu sehen. Wir beginnen mit der Interpretation der Ergebnisse des Fluktuationstests. Sehr hoch ist seine Güte bei den Alternativen 3 und 4. Bei den Alternativen 1 und 2 ist sie immer noch hoch, während sie bei 5 etwas niedriger ausfällt. Daraus lassen sich zwei Aussagen folgern. Einerseits werden Brüche in der Mitte der Zeitreihe besser erkannt. Andererseits steigt die Güte erwartungsgemäß mit der Größe der Parameteränderung an.

Der Vergleich des Fluktuationstests mit dem Test von R. Jennrich zeigt, dass letzterer bei Zeitreihen, die einen Strukturbruch genau in der Mitte haben, leicht überlegen ist. Weicht der Strukturbruch jedoch von der Mitte ab (z.B. Alternative 2), hat der Fluktuationstest von Wied et al. (2012) eine höhere Güte. Alternative 5, das heißt ein Sprung der Korrelation nach oben und dann wieder nach unten, wird vom Jennrich-Test sogar überhaupt nicht entdeckt. Dies zeigt den Vorteil, dass beim Fluktuationstest die möglichen Zeiten des Strukturbruchs a priori nicht bekannt sein müssen. Muss solch ein Zeitpunkt vorher festgelegt werden und ist diese Festlegung falsch, so verliert ein derartiger Test deutlich an Güte.

Tabelle 3 ungefähr hier

Zusammenfassend bleibt nach diesem Abschnitt festzuhalten, dass der neue Fluktuationstest für Fragestellungen bzgl. Aktien- oder Wertpapierrenditen deutlich besser geeignet zu sein scheint. Einerseits ist der Test robust gegen schwere Ränder. Andererseits besitzt der Test eine deutlich bessere Güte, sobald der Zeitpunkt eines Strukturbruchs nicht genau bekannt ist.

## 4 Anwendung auf reale Zeitreihen

Um die Anwendungsmöglichkeiten des Tests für reale Daten zu untersuchen, wenden wir ihn auf verschiedene Zeitreihen an und bestimmen die Daten der Strukturbrüche. Dabei verwenden wir zwei Kombinationen von Wertpapieren für die Untersuchung. Im ersten Fall verwenden wir die stetigen Renditen des DAX und des REX (als Performance-Index). Dabei reichen die Daten vom 01.01.1988 bis zum 04.01.2011. Im zweiten Beispiel werden die stetigen Renditen einer Industrieaktie (Siemens) und eines Finanzwertes (Deutsche Bank) analysiert. Dafür stehen Daten für den Zeitraum 01.01.1973 bis 04.01.2011 zur Verfügung. Als Datenquelle dient in beiden Fällen Thomson Reuters Datastream. Für alle Zeitreihen verwenden wir die Schlusskurse zur Berechnung der Renditen. Die Abbildungen 3,4,5,6 zeigen die Renditen im Zeitablauf.

Abbildungen 3,4,5,6 ungefähr hier

Die Testprozedur ist wie folgt. Wir starten mit dem 20. Datenpunkt und erhöhen die Testperiode sukzessive um einen Tag. Die Wahl des Startpunkts ist dadurch bedingt, dass (als Faustregel) ungefähr 20 Datenpunkte notwendig sind, um die Korrelation verlässlich schätzen zu können. 20 Handelstage entsprechen daneben ungefähr einem Monat, so dass wir davon ausgehen, dass wieder ausreichend neue Informationen in den Daten vorhanden sind. Dieses Vorgehen wird beibehalten, bis der Test die Nullhypothese einer konstanten Korrelation verwirft. Nun wird wieder 20 Tage gewartet und die Prozedur für den restlichen Zeitraum wiederholt. Das Warten von 20 Tagen ist notwendig, da sich die Parameter geändert haben, ungefähr 20 Datenpunkte zum Schätzen notwendig sind und die Daten von zwei verschiedenen Strukturen nicht vermischt werden sollen. Als Signifikanzniveau wählen wir  $\alpha = 1\%$ . Für diese Wahl sind die eventuell störenden Auswirkungen des sequentiellen Testens zu vernachlässigen (vgl. Wied et al., 2011a).

Die Ergebnisse und Daten der Strukturbrüche finden sich in Tabelle 4 und scheinen sehr plausibel zu sein. So lassen sich den Strukturbrüchen Ereignisse zuordnen, welche für die Finanzmärkte relevant waren. Besonders für die beiden Aktien lassen sich die Daten gut erklären. Am 19. Oktober 1987 (Schwarzer Montag) gab es einen großen Börsencrash, im Zeitraum 2000 bis 2002 ereignete sich die Dotcom-Krise und in den Jahren 2007/2008 hielt die Finanzkrise die Märkte in Atem. Dabei ist es nicht überraschend, dass Aktien aus verschiedenen Sektoren unterschiedlich auf diese Ereignisse reagiert haben und sich somit die Korrelation zwischen diesen Werten geändert hat.

Tabelle 4 ungefähr hier

Bei den beiden Indizes traten deutlich weniger Strukturbrüche auf. Vernachlässigt man den 05.07.2002, so teilen die beiden verbleibenden Strukturbrüche den gesamten Zeitraum in zwei Phasen. Von 1988 bis 1998 war die Korrelation der Renditen stets positiv. In diesem Zeitraum



galt scheinbar der Grundsatz, dass sinkende Zinsen gut für Aktien sind, was sich aus klassischen Theorien auch einfach und verlässlich folgern lässt. So führen sinkende Zinsen einerseits zu steigenden Anleihekursen. Andererseits verbilligen sinkende Zinsen die Kreditaufnahme, was zu mehr Investitionen und einer Stärkung der Wirtschaft führt. Dies spiegelt sich dann in steigenden Aktienkursen wider. 1998 änderte sich dieser Grundsatz und die Korrelation war von da an (mit einer kleinen Ausnahme) negativ. Scheinbar überwiegt seit diesem Zeitpunkt der Grundsatz, dass in Krisenzeiten das Geld in vermeintlich sichere Anlagen fließt, nämlich Staatsanleihen, und in ruhigeren Phasen wieder in die Aktienmärkte.

Vom heutigen Standpunkt aus betrachtet und mit dem Wissen, dass die Einführung des Euro und der Übergang der geldpolitischen Hoheit an die Europäische Zentralbank (EZB), rein institutionell betrachtet, ein sehr einflussreiches und prägendes Ereignis für die Finanzmärkte war, ist es sehr interessant, dass die grundsätzliche Änderung der Korrelation gerade in das Jahr 1998 fällt. So wurde in diesem Jahr die EZB gegründet und damit die dritte und letzte Stufe der Europäischen Währungsunion eingeleitet. Daneben stellen die Asienkrise (1997/1998) und die Rubelkrise (1998/1999) zwei weitere Ereignisse dar, die zu einer Änderung der Korrelationsstruktur beigetragen haben könnten. Abbildungen 1 und 2 verdeutlichen die Ergebnisse. Sie zeigen die Entwicklung der Korrelationen, dargestellt in einem rollierenden Fenster von 250 Tagen, und die aufgetretenen Strukturbrüche.

Abbildungen 1 und 2 ungefähr hier

Abbildungen 7 und 8 zeigen den jeweiligen Verlauf der Werte für die einzelnen Tage innerhalb der Teststatistik für die Renditen von DAX / REX bzw. von Siemens / Deutsche Bank, wenn der Test auf den vollständigen Datensatz angewandt wird. Dargestellt ist also der Verlauf der gewichteten Abweichungen zwischen den sukzessive berechneten Korrelationen und der Korrelation über den vollständigen Zeitraum. In diesem Fall betragen die Werte der Teststatistiken 6.671 bei DAX / REX und 3.498 bei Siemens / Deutsche Bank, sind also jeweils deutlich größer als das 99%-Quantil der asymptotischen Verteilung von (1) unter der Nullhypothese.

Interessant ist, dass zumindest bei Siemens / Deutsche Bank der Zeitpunkt des Maximums der Teststatistik (ca. 1995) nicht zu einem der gefundenen Brüche aus Tabelle 4 korrespondiert, obwohl das Maximum eigentlich ein guter Schätzer für den „stärksten“ Bruchpunkt in einer Zeitreihe ist (vgl. Galeano & Wied, 2012).

Abbildungen 7 und 8 ungefähr hier

Abschließend ist es natürlich interessant zu sehen, wie sich die Korrelationen zwischen den Daten der Strukturbrüche entwickelt haben. Tabelle 5 enthält daher die Korrelationen zwischen den Daten, an denen der Test die Nullhypothese verworfen hat. Gerade bei den Indizes DAX und REX fällt auf, dass sich die Korrelationen in den einzelnen Zeiträumen deutlich unterscheiden. Bei den Aktien ist dies ähnlich. Allerdings kam es während der Dotcom- und Finanzkrise zu

relativ vielen Strukturbrüchen. Daher treten in diesen Phasen auch ähnliche Korrelationen auf. Zu dieser Zeit waren die Märkte jedoch so unruhig, dass die Änderungen zu schnell und ausgeprägt waren, als dass verlässliche Aussagen möglich sind.

Tabelle 5 ungefähr hier

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben in dieser Arbeit einen Fluktuationstest auf konstante Korrelationen näher analysiert und eine mögliche Anwendung auf Finanzzeitreihen untersucht. In einem ersten Schritt haben wir den Test mit einem älteren Verfahren von R. Jennrich verglichen und festgestellt, dass der neue Fluktuationstest robuster ist gegen Verteilungen mit schweren Rändern, wie sie bei Finanzzeitreihen auftreten. Daneben liegt der große Vorteil darin, dass keine Vorahnung bezüglich möglicher Bruchpunkte notwendig ist. Eventuell problematisch ist die Forderung der Existenz ähnlicher Momente und (im Wesentlichen) Konstanz der Varianzen; in der aktuellen Forschung geht es darum, diese Probleme zumindest teilweise zu lösen (vgl. Dehling et al., 2012 und Wied et al., 2011b).

In einem zweiten Schritt haben wir den Test auf reale Zeitreihen angewandt und festgestellt, dass die Bruchpunkte nachvollziehbar sind. Daher scheint eine Anwendung des Tests auf Finanzzeitreihen sinnvoll. Daraus ergeben sich verschiedene Anwendungsfelder. Die ursprüngliche Idee bei der Entwicklung des Tests war es, optimale Zeitpunkte für die Neuoptimierung eines Portfolios zu finden. Sollten sich nämlich die Input-Parameter (u.a. Korrelationen) signifikant ändern, wäre das Optimierungsergebnis nicht länger valide. Somit kann der Test für das Timing von Re-Optimierungen genutzt werden. Eine weitere mögliche Anwendung ist die Implementierung einer Warnfunktion. Sollten ungünstige Parameterverschiebungen eintreten, können Warnmeldungen für das Risikomanagement generiert werden. Alternativ könnten auch ganze Anlagestrategien auf Basis von Strukturbrüchen entwickelt werden (vgl. Wied et al., 2011a).

Für die jeweilige Anwendung sind unterschiedliche Signifikanzniveaus geeignet. Je höher das Signifikanzniveau gewählt wird, desto früher und öfter verwirft der Test natürlich die Nullhypothese. So ist für einige Anwendungen sicherlich ein höheres Niveau von z.B.  $\alpha = 5\%$  sinnvoll. Jedoch kann dann bei unserem Vorgehen die Problematik des sequentiellen Testens auftreten (vgl. Wied et al., 2011a). Eine Behandlung dieser Problematik steht nicht im Mittelpunkt dieser Arbeit, befindet sich aber im Fokus der aktuellen Forschung (vgl. Wied & Galeano, 2012).

**Danksagung und Anmerkung.** Die Arbeit des dritten Autors wurde durch das BMBF (Project INVERS) unterstützt und die Arbeit der ersten drei Autoren durch die DFG (SFB 823, Projekte A1 und C4). Wir bedanken uns bei dem Herausgeber Ralf Münnich und bei zwei anonymen Gutachtern für viele hilfreiche Hinweise, die zu einer substanziellen Verbesserung

einer früheren Version dieses Artikels geführt haben. Der vorliegende Artikel ersetzt den (englischsprachigen) Aufsatz *A new online-test for changes in correlations*, welcher als SFB 823 Diskussionspapier 34/10 zirkuliert.

## 6 Anhang

Die Formel von  $\hat{D}$  für die Teststatistik (1) ergibt sich durch

$$\hat{D} = (\hat{F}_1 \hat{D}_{3,1} + \hat{F}_2 \hat{D}_{3,2} + \hat{F}_3 \hat{D}_{3,3})^{-\frac{1}{2}}$$

wobei

$$\begin{pmatrix} \hat{F}_1 & \hat{F}_2 & \hat{F}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{D}_{3,1} \hat{E}_{11} + \hat{D}_{3,2} \hat{E}_{21} + \hat{D}_{3,3} \hat{E}_{31} \\ \hat{D}_{3,1} \hat{E}_{12} + \hat{D}_{3,2} \hat{E}_{22} + \hat{D}_{3,3} \hat{E}_{32} \\ \hat{D}_{3,1} \hat{E}_{13} + \hat{D}_{3,2} \hat{E}_{23} + \hat{D}_{3,3} \hat{E}_{33} \end{pmatrix}',$$

$$\begin{aligned} \hat{E}_{11} &= \hat{D}_{1,11} - 4\hat{\mu}_x \hat{D}_{1,13} + 4\hat{\mu}_x^2 \hat{D}_{1,33}, \\ \hat{E}_{12} &= \hat{E}_{21} = \hat{D}_{1,12} - 2\hat{\mu}_x \hat{D}_{1,23} - 2\hat{\mu}_y \hat{D}_{1,14} + 4\hat{\mu}_x \hat{\mu}_y \hat{D}_{1,34}, \\ \hat{E}_{22} &= \hat{D}_{1,22} - 4\hat{\mu}_y \hat{D}_{1,24} + 4\hat{\mu}_y^2 \hat{D}_{1,44}, \\ \hat{E}_{13} &= \hat{E}_{31} = -\hat{\mu}_y \hat{D}_{1,13} + 2\hat{\mu}_x \hat{\mu}_y \hat{D}_{1,33} - \hat{\mu}_x \hat{D}_{1,14} + 2\hat{\mu}_x^2 \hat{D}_{1,34} + \hat{D}_{1,15} - 2\hat{\mu}_x \hat{D}_{1,35}, \\ \hat{E}_{23} &= \hat{E}_{32} = -\hat{\mu}_y \hat{D}_{1,23} + 2\hat{\mu}_x \hat{\mu}_y \hat{D}_{1,44} - \hat{\mu}_x \hat{D}_{1,24} + 2\hat{\mu}_y^2 \hat{D}_{1,34} + \hat{D}_{1,25} - 2\hat{\mu}_y \hat{D}_{1,45}, \\ \hat{E}_{33} &= \hat{\mu}_y^2 \hat{D}_{1,33} + 2\hat{\mu}_x \hat{\mu}_y \hat{D}_{1,34} - 2\hat{\mu}_y \hat{D}_{1,35} + \hat{\mu}_x^2 \hat{D}_{1,44} + \hat{D}_{1,55} - 2\hat{\mu}_x \hat{D}_{1,45}, \end{aligned}$$

$$\hat{D}_1 = \begin{pmatrix} \hat{D}_{1,11} & \hat{D}_{1,12} & \hat{D}_{1,13} & \hat{D}_{1,14} & \hat{D}_{1,15} \\ \hat{D}_{1,21} & \hat{D}_{1,22} & \hat{D}_{1,23} & \hat{D}_{1,24} & \hat{D}_{1,25} \\ \hat{D}_{1,31} & \hat{D}_{1,32} & \hat{D}_{1,33} & \hat{D}_{1,34} & \hat{D}_{1,35} \\ \hat{D}_{1,41} & \hat{D}_{1,42} & \hat{D}_{1,43} & \hat{D}_{1,44} & \hat{D}_{1,45} \\ \hat{D}_{1,51} & \hat{D}_{1,52} & \hat{D}_{1,53} & \hat{D}_{1,54} & \hat{D}_{1,55} \end{pmatrix} = \sum_{t=1}^T \sum_{u=1}^T k\left(\frac{t-u}{\gamma_T}\right) V_t V_u',$$

$$V_t = \frac{1}{\sqrt{T}} U_t^{***}, \gamma_T = [\log T],$$

$$U_t^{***} = \left( X_t^2 - \overline{(X^2)}_T \quad Y_t^2 - \overline{(Y^2)}_T \quad X_t - \bar{X}_T \quad Y_t - \bar{Y}_T \quad X_t Y_t - \overline{(XY)}_T \right)',$$

$$k(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

$$\hat{\mu}_x = \bar{X}_T, \hat{\mu}_y = \bar{Y}_T, \hat{D}_{3,1} = -\frac{1}{2} \frac{\hat{\sigma}_{xy}}{\hat{\sigma}_y} \hat{\sigma}_x^{-3}, \hat{D}_{3,2} = -\frac{1}{2} \frac{\hat{\sigma}_{xy}}{\hat{\sigma}_x} \hat{\sigma}_y^{-3}, \hat{D}_{3,3} = \frac{1}{\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y},$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \overline{(X^2)}_T - (\bar{X}_T)^2, \hat{\sigma}_y^2 = \overline{(Y^2)}_T - (\bar{Y}_T)^2, \hat{\sigma}_{xy} = \overline{(XY)}_T - \bar{X}_T \bar{Y}_T,$$

und

$$\begin{aligned}\overline{(X^2)}_T &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t^2, \quad \overline{(Y^2)}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t^2, \\ \bar{X}_T &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t, \quad \bar{Y}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t, \\ \overline{(XY)}_T &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t Y_t.\end{aligned}$$

## Literatur

- Aue, A., S. Hörmann, L. Horváth, & M. Reimherr 2009. Break detection in the covariance structure of multivariate time series models. *Annals of Statistics*, 37(6B):4046–4087.
- Billingsley, P. 1968. *Convergence of probability measures*. Wiley, New York.
- Bissantz, N., V. Steinorth, & D. Ziggel 2011. Stabilität von Diversifikationseffekten im Markowitz-Modell. *AStA Wirtschafts- und Sozialstatistisches Archiv*, 5(2):145–157.
- Bracker, K., & P.D. Koch 1999. Economic Determinants of the Correlation Structure Across International Equity Markets. *Journal of Economics and Business*, 51:443–471.
- Chow, G.C. 1960. Tests of Equality Between Sets of Coefficients in Two Linear Regressions. *Econometrica*, 28(3):591–605.
- Dehling, H., D. Vogel, M. Wendler, & D. Wied 2012. An efficient and robust test for a change point in correlation. *Arbeitspapier arXiv:1203.4871v2*.
- Dias, A., & P. Embrechts 2004. Change point analysis for dependence structures in finance and insurance. In Szegö, G. (ed), *Risk measures of the 21th century*. Wiley, New York.
- Galeano, P., & D. Wied 2012. Multiple break detection in the correlation structure of random variables. *Arbeitspapier arXiv:1206.5367v1*.
- Goetzmann, W.N., L. Li, & K.G. Rouwenhorst 2005. Long-term global market correlations. *Journal of Business*, 78(1):1–38.
- Jennrich, R.I. 1970. An asymptotic chi-square test for the equality of two correlation matrices. *Journal of the American Statistical Association*, 65:904–912.
- Kaplanis, E.C. 1988. Stability and forecasting of the comovement measures of international stock market returns. *Journal of International Money and Finance*, 7(1):63–75.
- Krishan, C.N.V., R. Petkova, & P. Ritchken 2009. Correlation risk. *Journal of Empirical Finance*, 16:353–367.
- Longin, F., & B. Solnik 1995. Is the correlation in international equity returns constant: 1960-1990? *International Money and Finance*, 14(1):3–26.
- Mandelbrot, B. 1962. *The Variation of Certain Speculative Prices*. IBM Research Report NC-87.
- Pearson, E.S., & S.S. Wilks 1933. Methods of statistical analysis appropriate for  $k$  samples of two variables. *Biometrika*, 25:353–378.

- Ploberger, W., W. Krämer, & K. Kontrus 1989. A new test for structural stability in the linear regression model. *Journal of Econometrics*, 40:307–318.
- Sancetta, A., & S.E. Satchell 2007. Changing correlations and equity portfolio failure for linear factor models during market declines. *Applied Mathematical Finance*, 14:227–242.
- Trede, M., & F. Schmid 2005. *Finanzmarktstatistik*. Springer.
- Wied, D. 2009. Ein Fluktuationstest auf konstante Korrelation. Dissertation, TU Dortmund.
- Wied, D., M. Arnold, N. Bissantz, & Z. Ziggel 2011a. A new fluctuation test for constant variances with applications to finance. *Metrika*, erscheint.
- Wied, D., H. Dehling, M. van Kampen, & D. Vogel 2011b. A fluctuation test for constant Spearman’s rho with nuisance-free limit distribution. *Arbeitspapier arXiv:1206.5070v1*.
- Wied, D., & P. Galeano 2012. Monitoring correlation change in a sequence of random variables. *Journal of Statistical Planning and Inference*, erscheint.
- Wied, D., W. Krämer, & H. Dehling 2012. Testing for a change in correlation at an unknown point in time using an extended functional delta method. *Econometric Theory*, 58(3):570–589.
- Zimmermann, H., W. Drobetz, & P. Oertmann 2002. *Global Asset Allocation*. Wiley, New Jersey.

$T$	$\rho = -0,9$	$\rho = -0,5$	$\rho = 0$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,9$
200	0,192	0,052	0,039	0,052	0,193
	(0,048)	(0,051)	(0,053)	(0,050)	(0,049)
500	0,071	0,046	0,041	0,046	0,071
	(0,050)	(0,051)	(0,050)	(0,050)	(0,049)
1000	0,053	0,046	0,043	0,046	0,053
	(0,050)	(0,050)	(0,051)	(0,048)	(0,050)
2000	0,050	0,047	0,045	0,047	0,049
	(0,049)	(0,050)	(0,050)	(0,050)	(0,050)

Tabelle 1: Simulationsergebnisse bei wahrer Nullhypothese (Normalverteilung, konstante Varianz) für das empirische Niveau ( $\alpha = 5\%$ ) beim Fluktuationstest und beim Test von R. Jennrich (Werte in Klammern).

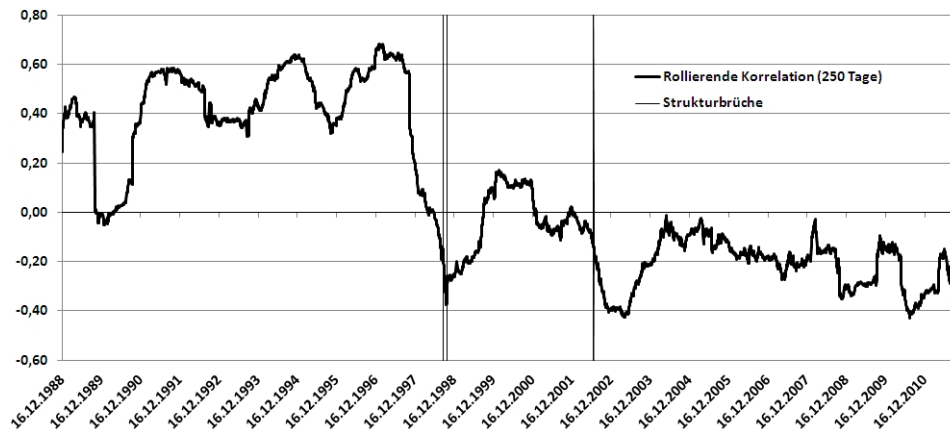


Abbildung 1: Rollierende Korrelation (250 Tage) zwischen den Renditen von DAX und REX mit aufgetretenen Strukturbrüchen für  $\alpha = 1\%$ .

$T$	$\rho = -0,9$	$\rho = -0,5$	$\rho = 0$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,9$
200	0,144 (0,164)	0,054 (0,170)	0,039 (0,172)	0,053 (0,171)	0,142 (0,165)
500	0,064 (0,185)	0,040 (0,188)	0,035 (0,189)	0,041 (0,189)	0,064 (0,186)
1000	0,048 (0,198)	0,038 (0,200)	0,034 (0,200)	0,039 (0,200)	0,049 (0,199)
2000	0,043 (0,213)	0,038 (0,214)	0,036 (0,214)	0,038 (0,214)	0,043 (0,213)
10000	0,041 (0,228)	0,041 (0,228)	0,040 (0,228)	0,040 (0,228)	0,040 (0,228)

Tabelle 2: Simulationsergebnisse bei wahrer Nullhypothese ( $t_5$ -Verteilung, konstante Varianz) für das empirische Niveau ( $\alpha = 5\%$ ) beim Fluktuationstest und beim Test von R. Jennrich (Werte in Klammern).

Alternative	$T = 200$	$T = 500$	$T = 1000$	$T = 2000$
1	0,316 (0,321)	0,556 (0,648)	0,811 (0,898)	0,963 (0,992)
2	0,270 (0,124)	0,437 (0,237)	0,685 (0,410)	0,907 (0,679)
3	0,954 (0,999)	0,995 (1)	0,999 (1)	1 (1)
4	0,879 (0,750)	0,987 (0,971)	0,997 (0,998)	0,999 (1)
5	0,113 (0,050)	0,174 (0,052)	0,338 (0,054)	0,667 (0,053)
0,95-Quantil Jennrich-Test	8,117	8,877	9,462	9,911

Tabelle 3: Güteeigenschaften des Fluktuationstests bei fünf verschiedenen Alternativen mit der  $t_5$ -Verteilung und  $\alpha = 5\%$  im Vergleich mit dem Test von R. Jennrich (Werte in Klammern).



DAX & REX	Siemens & Deutsche Bank
07.09.1998	04.03.1987
09.10.1998	01.04.1987
05.07.2002	28.10.1987
	03.04.2000
	05.12.2000
	23.03.2001
	15.10.2002
	08.11.2007
	06.12.2007
	22.01.2008
	17.03.2008
	10.10.2008

Tabelle 4: Daten der Strukturbrüche für verschiedene Kombinationen von Wertpapieren und  $\alpha = 1\%$ .

DAX & REX	Siemens & Deutsche Bank
01.01.1988 bis 07.09.1998: 0,32	01.01.1973 bis 04.03.1987: 0,64
07.09.1998 bis 09.10.1998: -0,55	04.03.1987 bis 01.04.1987: 0,74
09.10.1998 bis 05.07.2002: -0,03	01.04.1987 bis 28.10.1987: 0,78
05.07.2002 bis 04.11.2011: -0,26	28.10.1987 bis 03.04.2000: 0,59
	03.04.2000 bis 05.12.2000: 0,21
	05.12.2000 bis 23.03.2001: 0,72
	23.03.2001 bis 15.10.2002: 0,72
	15.10.2002 bis 08.11.2007: 0,69
	08.11.2007 bis 06.12.2007: 0,31
	06.12.2007 bis 22.01.2008: 0,79
	22.01.2008 bis 17.03.2008: 0,77
	17.03.2008 bis 10.10.2008: 0,64
	10.10.2008 bis 04.11.2011: 0,71

Tabelle 5: Korrelationen zwischen den Strukturbrüchen.

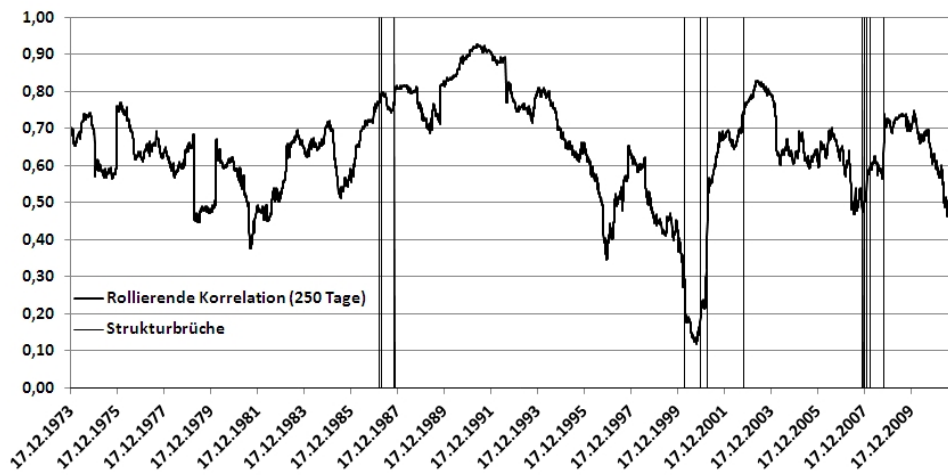


Abbildung 2: Rollierende Korrelation (250 Tage) zwischen den Renditen von Siemens und Deutsche Bank mit aufgetretenen Strukturbrüchen für  $\alpha = 1\%$ .

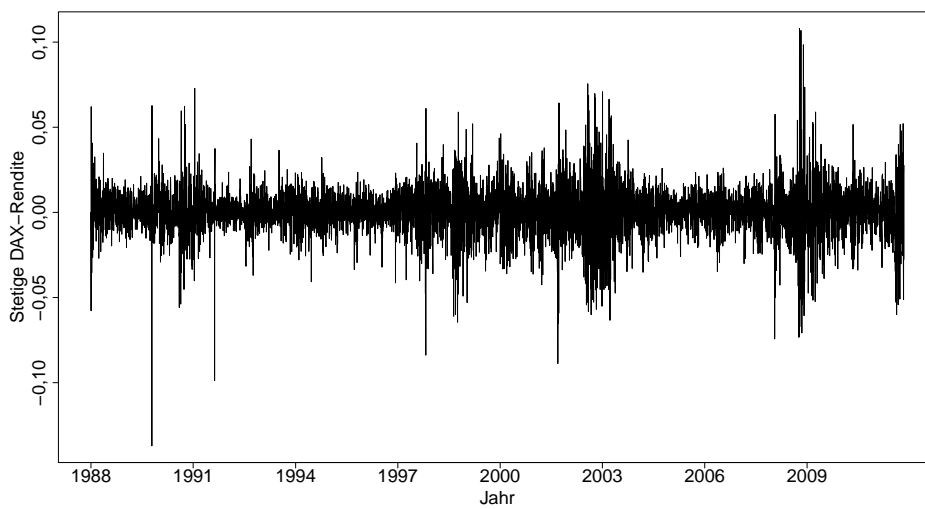


Abbildung 3: Tagesrenditen des DAX im Zeitverlauf

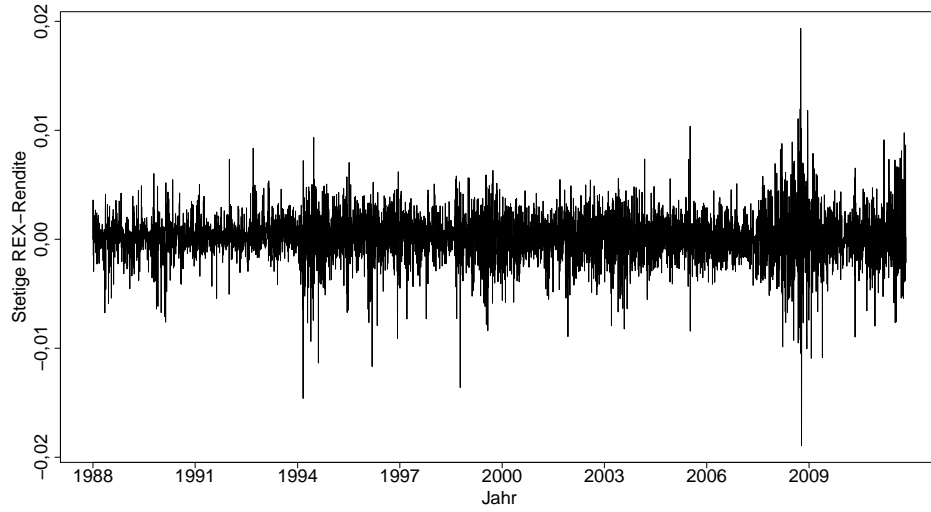


Abbildung 4: Tagesrenditen des REX im Zeitverlauf

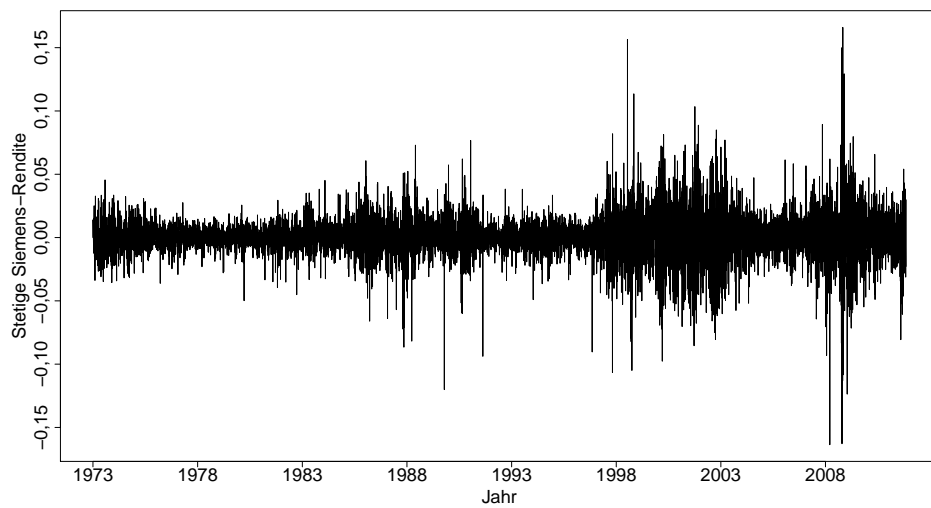


Abbildung 5: Tagesrenditen von Siemens im Zeitverlauf

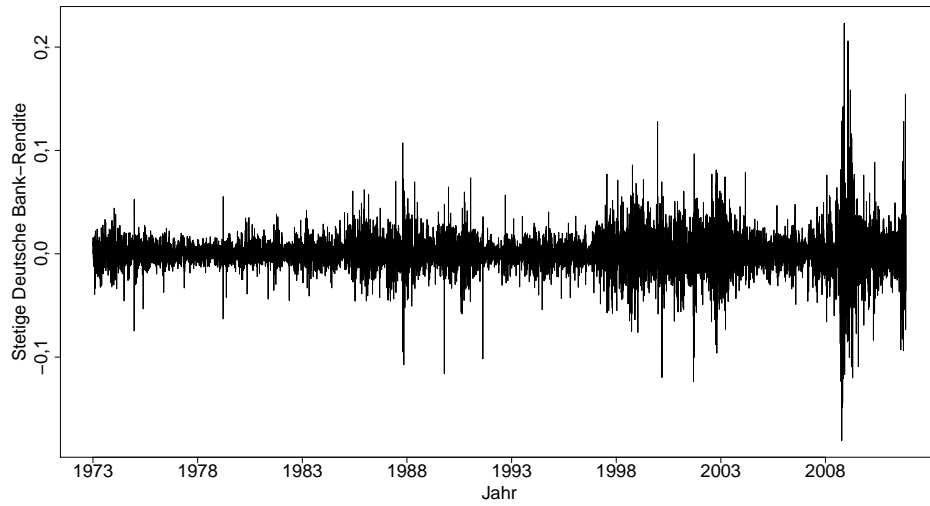


Abbildung 6: Tagesrenditen der Deutschen Bank im Zeitverlauf

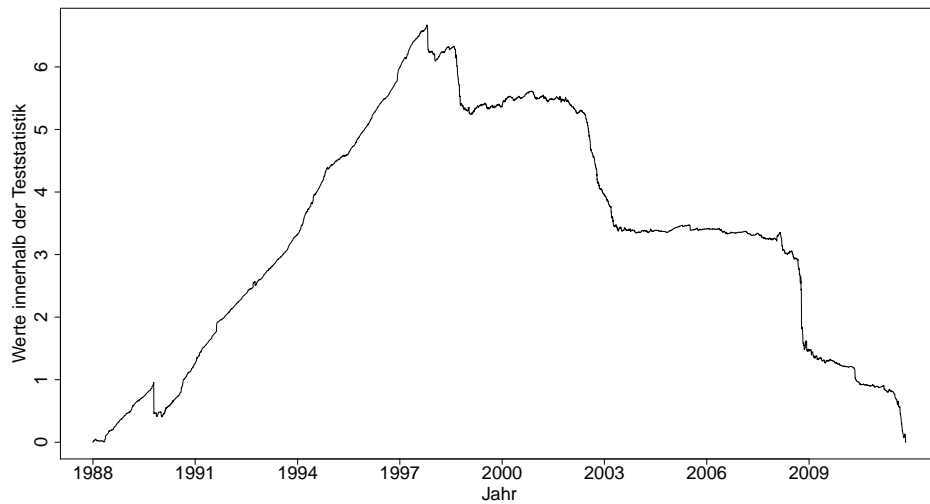


Abbildung 7: Werte für die einzelnen Tage innerhalb der Teststatistik für die Renditen von DAX / REX

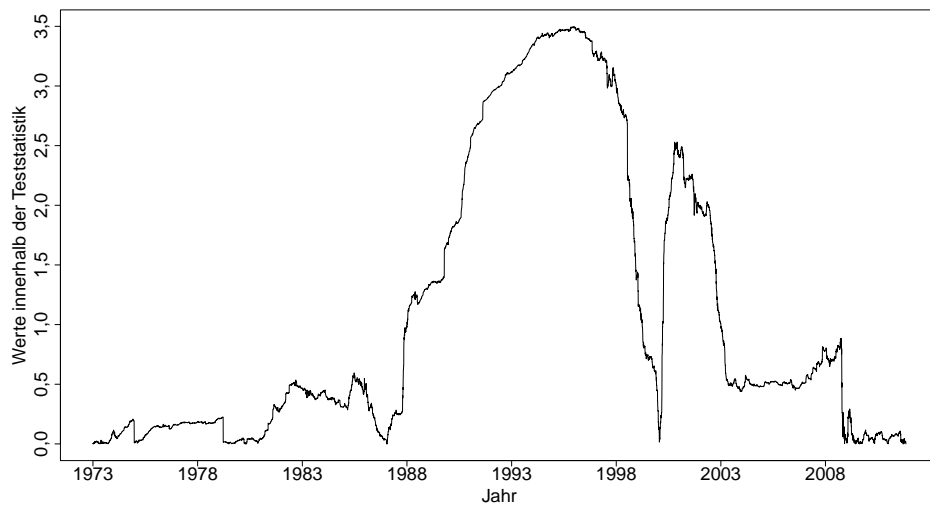


Abbildung 8: Werte für die einzelnen Tage innerhalb der Teststatistik für die Renditen von Siemens / Deutsche Bank